ゲージ場における古典力学系と量子エネルギー(力学系と微分幾何学)

桑原, 類史

数理解析研究所講究録
1500巻 2006年 69-80

ゲージ場における古典力学系と量子エネルギー

徳島大・総合科学部　桑原 類史（Ruishi KUWABARA）†
Dept. of Integrated Arts and Sciences
The Univercity of Tokushima

はじめに

ゲージ場における力学系とは，Riemann 多様体 (M, m) 上の主 G 束 $\pi : P \to M$ の接続 $\tilde{\nabla}$ から定義されるものである．

M の局所近傍系 $\{U_\alpha\}$ および対応する変換関数 $\varphi_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta (\neq \phi) \to G$ を用いると，接続 $\tilde{\nabla}$ の曲率は，各 U_α 上で定義された $\mathfrak{g}$ 値2次形式 $\bar{\Theta}_\alpha$ で，変換則

$$\bar{\Theta}_\beta = \mathrm{Ad}(\varphi_{\alpha\beta}^{-1})\bar{\Theta}_\alpha$$

を満たすものとして定義される．この様な $\mathfrak{g}$ 値2次形式の族 $\{\bar{\Theta}_\alpha\}$ を（M 上の）**ゲージ場**という．$G = U(1)$（可換群）の場合は，$\bar{\Theta}_\alpha = \bar{\Theta}_\beta$ となり，M 上の2次形式が定義され，**磁場**と呼ばれる．

ゲージ場（Yang-Mills 場）における古典力学系（古典粒子の運動）や量子力学系（Schrödinger 作用素）のエネルギー分布（スペクトル）の研究は，1980年代から大域解析学のテーマの一つとして，超局所解析，表現論，数理物理学などの視点から研究されてきている（[2], [3], [7], [8] など）．ここでは，古典・量子対応（量子化条件）の視点から，ゲージ場の力学および幾何学を考察する．特に，量子化条件をみたす古典エネルギーと量子エネルギーとの対応に関する（予想される）定理を述べ，証明の筋書きを示すことにする．

1 古典力学系

G をコンパクト半単純 Lie 群とする．G の Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 上の（正定値）内積 $m_\mathfrak{g}$ を $(-1) \times$ Killing 形式とすると，内積 $m_\mathfrak{g}$ は $\mathrm{Ad}(g)$ $(g \in G)$ で不変だから，これより，G 上の両側不変計量 m_G が誘導される．M 上の主 G 束 $\pi : P \to M$ に対して，M の計量 m，G の計量 m_G，および P の接続 $\tilde{\nabla}$ から，P 上の Riemann 計量 $\tilde{m}$（Kaluza- Klein

†E-mail address: kuwabara@ias.tokushima-u.ac.jp

計量と呼ばれる）が，ファイバーの接空間 V と水平部分空間 H が直交するように定義される．計量 $\widetilde{m}$ から自然に，T^*P 上の Hamilton 関数 $\widetilde{H}$ が定義され，Hamilton 力学系 $(T^*P, \Omega_P, \widetilde{H})$ が定義される．ここで，Ω_P は T^*P 上の標準シンプレクティック形式である．

◇ **力学系の簡約（cf. [1]）**

群 G の P への（右）作用は自然に T^*P 上リフトされ，その作用で Ω_P, $\widetilde{H}$ は不変である．G の（Ω_P を不変にする）シンプレクティック作用に対応する**運動量写像** $J : T^*P \to \mathfrak{g}^*$ ($\mathfrak{g}$ の双対空間）が

$$\langle J(p), A\rangle = \langle p, A^P\rangle \quad (p \in T^*P,\ A \in \mathfrak{g})$$

によって定義される．ここで，A^P は $A \in \mathfrak{g}$ から（無限小 G-作用として）定義される P 上のベクトル場を表す．このとき，J は力学系 $(T^*P, \Omega_P, \widetilde{H})$ の不変量であり，Ad^*-同変，すなわち

$$J \circ R_g^* = \mathrm{Ad}^*(g) \circ J \quad (g \in G) \tag{1.1}$$

が満たされる．ただし，R_g は $g \in G$ による P 上の右移動 $p \mapsto p \cdot g$ を表し，$R_g^* : T^*_{p\cdot g}P \to T^*_pP$ である．また，$\mathrm{Ad}^*(g)$ は $\mathfrak{g}^*$ 上の余随伴作用であり，

$$\langle \mathrm{Ad}^*(g)\nu, X\rangle = \langle \nu, \mathrm{Ad}(g^{-1})X\rangle \quad (\nu \in \mathfrak{g}^*,\ X \in \mathfrak{g})$$

で定義される．

運動量写像 J に対応して，力学系の簡約プログラムが適用される： 任意の $\mu \in \mathfrak{g}^*$ に対して，$J^{-1}(\mu)$ は P の部分多様体である．

$$G_\mu := \{g \in G \mid \mathrm{Ad}^*(g)\mu = \mu\}$$

とおくと，$J^{-1}(\mu)$ は G_μ-不変である．商多様体 $P_\mu := J^{-1}(\mu)/G_\mu$ 上には，Ω_P から誘導されるシンプレクティック形式 Ω_μ，および $\widetilde{H}$ から誘導される Hamilton 関数 H_μ が定義される．このようにして，簡約化された Hamilton 力学系 $\mathcal{H}_\mu = (P_\mu, \Omega_\mu, H_\mu)$ が得られる．これを**ゲージ場における "charge" μ の粒子の古典力学系**という．

註． 商空間 G/G_μ は $\mathfrak{g}^*$ における μ を通る余随伴軌道 $\mathcal{O}_\mu = \{\mathrm{Ad}^*(g)\mu \mid g \in G\}$ と同一視できる．よって，(1.1) より，$P_\mu = J^{-1}(\mathcal{O}_\mu)/G$ が成り立つ．

◇ **力学系 $\mathcal{H}_\mu$ の接続形式による表現**

$G_\mu \neq G$ とする．商多様体 $M_\mu := P/G_\mu$ を考える．このとき，自然な射影 $\pi' : M_\mu \to M(= P/G)$ は $\mathcal{O}_\mu$ をファイバーとするファイバー空間の構造を与える．

射影 $\pi' : M_\mu \to M$ による余接束 $\pi_M : T^*M \to M$ の引き戻しを $\pi'_{M_\mu} : M_\mu^\# \to M_\mu$ とする：

$$M_\mu^\# = \{(q, \xi) \in M_\mu \times T^*M \mid \pi'(q) = \pi_M(\xi)\}.$$

$M_\mu^\#$ は T^*M_μ の部分ベクトル束と見なせる．実際，$M_\mu^\#$ の T^*M_μ への埋め込みを $(q, \xi) \mapsto \pi'^*(\xi) \in T_q^*M_\mu$ とすればよい．

$$
\begin{tikzcd}
 & & & T^*P \arrow[dlll, "\pi_P"'] \arrow[r, "J"] & \mathfrak{g}^* \\
P \arrow[ddd, "\pi"'] \arrow[ddr] & & & J^{-1}(\mu) \arrow[u, "\mathrm{incl.}"'] \arrow[r, phantom, "\subset"] \arrow[dd, "\pi_\mu"'] & J^{-1}(\mathcal{O}_\mu) \arrow[ddl, "\pi_{\mathcal{O}_\mu}"] \\
 & & T^*M_\mu \arrow[d, phantom, "\cup"] & & \\
 & M_\mu \arrow[dl, "\pi'"] & M_\mu^{\#} \arrow[l, "\pi'_{M_\mu}"'] \arrow[dr, "\tilde{\pi}'"'] & P_\mu\,(=J^{-1}(\mu)/G_\mu = J^{-1}(\mathcal{O}_\mu)/G) \arrow[l, "\chi_\mu"', "\cong"] & \\
M & & & T^*M \arrow[lll, "\pi_M"'] &
\end{tikzcd}
$$

図 1: 力学系の簡約化

接続 $\tilde{\nabla}$ の接続形式（P 上の $\mathfrak{g}$ 値 1 次形式）を θ とし，$\theta_\mu = \langle \mu, \theta \rangle$ とおく．

補題 1.1. G_μ の Lie 代数を $\mathfrak{g}_\mu$ とする．$\mathfrak{g}$ の要素 A に対して，

$$A \in \mathfrak{g}_\mu \iff \text{「} d\theta_\mu(A^P, X) = 0 \ \text{for}\ \forall X \in TP \text{」}.$$

この補題より，$d\theta_\mu$ は M_μ 上の閉 2 次形式と見なせる．そして，$M_\mu^{\#}$ 上の 2 次形式

$$\Omega_\mu^{\#} := (\tilde{\pi}')^*\Omega_M + (\pi'_{M_\mu})^*(d\theta_\mu)$$

は閉かつ非退化であり，$M_\mu^{\#}$ 上のシンプレクティック構造を与える．ただし，$\tilde{\pi}' : M_\mu^{\#} \to T^*M$ は $\pi' : M_\mu \to M$ から自然に定義される射影，Ω_M は T^*M の標準シンプレクティック形式である．($\Omega_\mu^{\#}$ が非退化であることは，Ω_M の非退化性および補題 1.1 の $\Longleftarrow$ から従う.)

註. $M_\mu^{\#}$ のシンプレクティック形式 $\Omega_\mu^{\#}$ は T^*M_μ のシンプレクティック構造 $\Omega_{M_\mu} + (\pi_{M_\mu})^*(d\theta_\mu)$ を $M_\mu^{\#}$ に制限したものになっている．ただし，Ω_{M_μ} は T^*M_μ の標準シンプレクティック形式，$\pi_{M_\mu} : T^*M_\mu \to M_\mu$ は自然な射影を表す．

M の Riemann 計量 m から自然に定まる T^*M 上の Hamiltonn 関数を H とする，すなわち，$H(x,\xi) = \sum m^{ij}(x)\xi_i\xi_j$．そして，$M_\mu^{\#}$ 上の Hamilton 関数を $H_\mu^{\#} := (\tilde{\pi}')^*H$ と定義する．このようにして，Hamilton 力学系 $(M_\mu^{\#}, \Omega_\mu^{\#}, H_\mu^{\#})$ が得られる．

命題 1.2. 力学系 $\mathcal{H}_\mu$ は力学系 $(M_\mu^{\#}, \Omega_\mu^{\#}, H_\mu^{\#})$ と同値である．すなわち，微分同相写像 $\chi_\mu : P_\mu \to M_\mu^{\#}$ が存在し，

$$\Omega_\mu = \chi_\mu^*\Omega_\mu^{\#}, \quad H_\mu = \chi_\mu^* H_\mu^{\#} + \|\mu\|^2.$$

◇ 局所座標系による表現 ― Wong の方程式

力学系 $(M_\mu^{\#}, \Omega_\mu^{\#}, H_\mu^{\#})$ を局所座標を用いて表現してみよう．P の局所自明構造 $U \times G$ $(U \subset M)$ による局所座標系を $(x, g) = (x^1, \ldots, x^d; g^1, \ldots, g^r)$ とする．M_μ

の局所自明構造は $U \times (G/G_\mu) \cong U \times \mathcal{O}_\mu$ である．余随伴軌道 $\mathcal{O}_\mu$ $(\subset \mathfrak{g}^*)$ の要素は，$\nu = \mathrm{Ad}^*(g)\mu$ $(g \in G)$ と表される．従って，M_μ の局所座標として，$(x, \nu) = (x^1, \ldots, x^d; \nu^1, \ldots, \nu^r)$ を用いる．$X \in \mathfrak{g}$ に対して，$\mathrm{ad}^*(X) : \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{g}^*$ を

$$\langle \mathrm{ad}^*(X)\nu, Y\rangle = \langle \nu, \mathrm{ad}(-X)Y\rangle = \langle \nu, -[X, Y]\rangle \quad (\nu \in \mathfrak{g}^*, Y \in \mathfrak{g})$$

とし，$\{X, \nu\} := \mathrm{ad}^*(X)\nu$ と定義する．$\nu \in \mathcal{O}_\mu$ における $\mathcal{O}_\mu$ の接ベクトル η は，$\mathfrak{g}^*$ の要素として，ある $X \in \mathfrak{g}$ によって，$\eta = \{X, \nu\}$ と表すことができる．

P 上の接続 $\tilde{\nabla}$ の接続形式 θ を

$$\theta(x, g) = \sum_j \theta_j(x, g) dx^j + \sum_\alpha \theta_\alpha(x, g) dg^\alpha$$

と表す．このとき，曲率 Θ は

$$\Theta = d\theta + \frac{1}{2}[\theta, \theta]$$

で定義される P 上の $\mathfrak{g}$ 値 2 次形式であり，局所的に

$$\begin{aligned}\Theta(x, g) &= \frac{1}{2}\sum_{i,j} \Theta_{ij}(x, g) dx^i \wedge dx^j \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i,j} \left\{ \left(\frac{\partial \theta_j}{\partial x^i} - \frac{\partial \theta_i}{\partial x^j} \right) + [\theta_i, \theta_j] \right\} dx^i \wedge dx^j\end{aligned}$$

と書ける．$\Theta_\mu := \langle \mu, \Theta\rangle$ とおくと，Θ_μ は M_μ 上の 2 次形式であることが容易に確かめられる．

命題 1.3. 力学系 $(M_\mu^\#, \Omega_\mu^\#, H_\mu^\#)$ における粒子の運動は，M_μ 上の次の方程式（Wong の方程式と呼ばれる [6]）で記述される：

$$\left.\begin{aligned} &\ddot{x}^i + \sum_{j,k} \Gamma^i_{jk}(x) \dot{x}^j \dot{x}^k - 2\sum_{j,k} m^{ij}(x) \Theta^{(\mu)}_{jk}(x, g) \dot{x}^k = 0 \\ &\dot{\nu} = \Big\{ \sum_j \theta_j(x, g) \dot{x}^j,\ \nu \Big\} \end{aligned}\right\}$$

ただし，$\Theta^{(\mu)}_{jk}(x, g) := \langle \mu, \Theta_{jk}(x, g)\rangle$，$\nu = \mathrm{Ad}^*(g)\mu$ $(g \in G)$ である．ここで，$\Theta^{(\mu)}_{jk}(x, g)$ および第 2 式右辺は $g (\in G)$ の同値類 $[g] \in G/G_\mu \cong \mathcal{O}_\mu$ にのみ依存する．

2 量子系（Schrödinger 作用素）

◇ G のユニタリ表現

Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の複素化を $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ とし，$\mathfrak{h}$ をその Cartan 部分代数とする．$(\mathfrak{g}_\mathbb{C}, \mathfrak{h})$ のルートの全体 Δ に対し，$\mathfrak{h}_\mathbb{R} := \{H \in \mathfrak{h} \mid \alpha(H) \in \mathbb{R} \text{ for } \forall\alpha \in \Delta\}$ とする．このとき，$\mathfrak{g}$ の Cartan 部分代数 $\mathfrak{t} \cong \mathbb{R}^l$ $(l = \mathrm{rank}G)$ に対して，$\mathfrak{h}_\mathbb{R} = i\mathfrak{t}$ であり，また，双対空間につ

いて $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^* = i\mathfrak{t}^* \subset \sqrt{-1}\mathfrak{g}^*$ が成り立つ. ($\mathfrak{g}$ の内積を経由して, $\mathfrak{g}^* \cong \mathfrak{g}$, $\mathfrak{t}^* \cong \mathfrak{t}$ と考えている.) $\Lambda := \mathfrak{h}_{\mathbb{R}} \cap \exp^{-1}(e)$ ($\exp : \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} \to G_{\mathbb{C}}$ で, e は $G_{\mathbb{C}}$ の単位元) とおくと, Λ は $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ の格子
($\cong i\mathbb{Z}^l$) である. Λ の双対格子を Λ^* ($\subset \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$) (整形式 (integral form) と呼ばれる) とする. すなわち,

$$\Lambda^* := \{\lambda \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^* \mid \langle \lambda, H\rangle \in 2\pi\mathbb{Z} \text{ for } \forall H \in \Lambda\} \cong 2\pi\sqrt{-1}\,\mathbb{Z}^l.$$

$\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$ において, 正の Weyl chamber を C^+ とすると, G の既約ユニタリ表現の全体 $\hat{G}$ は $C^+ \cap \Lambda^*$ と同一視される. また, 任意の $\mu(\neq 0) \in \mathfrak{g}^*$ に対して, $i\mathcal{O}_\mu(\subset \sqrt{-1}\mathfrak{g}^*)$ は, C^+ と 1 点で交わる.

◇ 量子状態空間, Schrödinger 作用素

$\mu \in \mathfrak{g}^*$ が $\lambda := \sqrt{-1}\mathcal{O}_\mu \cap C^+ \in \Lambda^*$ を満たす とする. λ を最高ウエイトとする G の既約ユニタリ表現を $(\rho_\lambda, V_\lambda)$ とすると, P に同伴する Hermite ベクトル束 $\mathcal{E}_\lambda = P \times_{\rho_\lambda} V_\lambda \to M$ が定義される. Hermite ベクトル束 $\mathcal{E}_\lambda$ の L^2 切断のなす Hilbert 空間 $L^2(M, \mathcal{E}_\lambda)$ を古典力学系 $\mathcal{H}_\mu = (P_\mu, \Omega_\mu, H_\mu)$ に対応する量子力学系の状態空間と考える.

さらに, P 上の接続 $\tilde{\nabla}$ から, $\mathcal{E}_\lambda$ の接続 (共変微分) $\tilde{\nabla} : C^\infty(M, \mathcal{E}_\lambda) \to C^\infty(M, T^*M \otimes \mathcal{E}_\lambda)$ が誘導される. これにより, $\mathcal{E}_\lambda$ 上の Laplacian $L^{(\lambda)} = \tilde{\nabla}^*\tilde{\nabla} : L^2(M, \mathcal{E}_\lambda) \to L^2(M, \mathcal{E}_\lambda)$ が定義される. 作用素 $L^{(\lambda)}$ を Schrödinger 作用素と考える. $L^{(\lambda)}$ は非負値, (形式的) 自己共役 2 階楕円型微分作用素で, 局所的に

$$L^{(\lambda)} = -\sum_{j,k} m^{jk}(\nabla_j + A_j)(\nabla_k + A_k) \tag{2.1}$$

と表される. ただし, ∇ は Levi-Civita 接続, $A = \sum A_j dx^j$ は接続 $\tilde{\nabla}$ から定まる M 上の局所 $\mathfrak{u}(V_\lambda)$ 値 1 次形式である.

M をコンパクトとすると, $L^{(\lambda)}$ のスペクトル (量子エネルギー) は, 非負の固有値列

$$\nu_1^{(\lambda)} \leq \nu_2^{(\lambda)} \leq \cdots \leq \nu_k^{(\lambda)} \leq \cdots \uparrow +\infty$$

から成る.

◇ P 上の L^2 空間, Laplacian

P 上の V_λ 値 L^2 関数 $\boldsymbol{f}$ で, 任意の $g \in G$ に対して

$$\boldsymbol{f}(p \cdot g) = \rho_\lambda(g^{-1})\boldsymbol{f}(p) \quad (p \in P)$$

を満たすもの (G 同変関数) の全体から成る空間を $L^2_\lambda(P, V_\lambda)$ とする. このとき,

$$L^2(M, \mathcal{E}_\lambda) \cong L^2_\lambda(P, V_\lambda)$$

が成り立つ (内積を適当にとれば, ユニタリ同型である).

表現 ρ_λ の指標を χ_λ とするとき, 写像 $P_\lambda : L^2(P) \to L^2(P)$; $f \mapsto f_\lambda$ を

$$f_\lambda(p) := \dim V_\lambda \int_G \chi_\lambda(g^{-1}) f(p \cdot g) dg \quad (p \in P)$$

と定義し，P_λ の像を $L^2_\lambda(P)$ とする．局所的に，$P \ni p = (x, g) \in U \times G \ (U \subset M)$ とするとき，

$$f_\lambda(p) = f_\lambda(x, g) = \sum_{i,j} \rho_\lambda(g)^i_j f_0(x)^j_i$$

の形で表せる．ここで，$\rho_\lambda(g)^i_j$ は表現の行列成分である．Peter-Weyl の定理より，

$$L^2(P) = \sum_{\rho_\lambda \in \hat{G}}{}^{\oplus} L^2_\lambda(P).$$

が成り立つ．

$\rho_\lambda(g) \ (g \in G)$ は $V^*_\lambda \otimes V_\lambda (= \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V_\lambda))$ の要素と考えて，写像（Fourier 変換）$\mathcal{F}_\lambda$: $L^2(P) \to L^2(P, V^*_\lambda \otimes V_\lambda)$; $f \mapsto F_\lambda$ を

$$F_\lambda(p) := \dim V_\lambda \int_G f(p \cdot g) \rho_\lambda(g) dg \quad (p \in P)$$

と定義し，$\mathcal{F}_\lambda$ の像を $L^2_\lambda(P, V^*_\lambda \otimes V_\lambda)$ とする．局所的に，

$$F_\lambda(p) = F_\lambda(x, g) = \rho_\lambda(g^{-1}) F_0(x)$$

と書ける．ただし，$F_0(x)$ は d 次正方行列である．このとき，$F_\lambda(p \cdot g) = \rho_\lambda(g^{-1}) F_\lambda(p)$ が成り立つことに注意すると，V_λ の正規直交基底 $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k\}$ $(d_\lambda := \dim V_\lambda)$ に対して，$\boldsymbol{f}^j_\lambda(p) := F_\lambda(p)\boldsymbol{v}_j \in V_\lambda \ (j = 1, \ldots, d_\lambda)$ とすると，$\boldsymbol{f}^j_\lambda(p) \in L^2_\lambda(P, V_\lambda)$ である．このようにして，次の同型が成り立つ：

$$L^2_\lambda(P, V^*_\lambda \otimes V_\lambda) \ \cong \ \overbrace{L^2_\lambda(P, V_\lambda) \oplus \cdots \oplus L^2_\lambda(P, V_\lambda)}^{d_\lambda \text{個}} .$$

$F_\lambda \in L^2_\lambda(P, V^*_\lambda \otimes V_\lambda)$ に対して（$F_\lambda(p)$ を d_λ 次正方行列と考えて），

$$[\Phi_\lambda(F_\lambda)](p) = \mathrm{Trace}\left[\,{}^t\overline{F_\lambda(p)}\,\right] \quad (p \in P)$$

と定義すると，$P_\lambda = \Phi_\lambda \circ \mathcal{F}_\lambda$ が成り立ち，Φ_λ は $L^2_\lambda(P, V^*_\lambda \otimes V_\lambda)$ から $L^2_\lambda(P)$ への全単射を与える（$\Phi^{-1}_\lambda = \mathcal{F}_\lambda$）．$f_\lambda(p) \in L^2_\lambda(P)$, $F_\lambda(p) \in L^2_\lambda(P, V^*_\lambda \otimes V_\lambda)$ は

このようにして，以下のような 1 対 1 対応関係が成り立つ：

$$\begin{aligned} L^2_\lambda(P) \ &\cong \ L^2_\lambda(P, V^*_\lambda \otimes V_\lambda) \\ &\cong \ L^2_\lambda(P, V_\lambda) \oplus \cdots \oplus L^2_\lambda(P, V_\lambda) \\ &\cong \ L^2(M, \mathcal{E}_\lambda) \oplus \cdots \oplus L^2(M, \mathcal{E}_\lambda). \end{aligned}$$

具体的に次のような対応をつけられる：

$$\begin{array}{ccccccc} L^2(M, \mathcal{E}_\lambda) & & L^2_\lambda(P, V_\lambda) & & L^2_\lambda(P, V^*_\lambda \otimes V_\lambda) & & L^2_\lambda(P) \\ \uplus & & \uplus & & \uplus & & \uplus \\ \psi_1, \ldots, \psi_{d_\lambda} & \leftrightarrow & \boldsymbol{\psi}_1, \ldots, \boldsymbol{\psi}_{d_\lambda} & \leftrightarrow & \Psi := (\boldsymbol{\psi}_1, \ldots, \boldsymbol{\psi}_{d_\lambda}) & \leftrightarrow & \psi_P := \mathrm{Trace}\left[\,{}^t\overline{\Psi}\,\right] \end{array}$$

Kaluza-Klein 計量 $\widetilde{m}$ から定まる P 上の Laplace-Beltrami 作用素を Δ_P とすると，Δ_P は $L^2_\lambda(P)$ を不変にする．G 上の両側不変計量から定まる Laplace-Beltrami 作用素 Δ_G に対して，$\Delta_G\rho_\lambda(g)^i_j = (\|\lambda+\delta\|^2_{\mathfrak{h}^*} - \|\delta\|^2_{\mathfrak{h}^*})\rho_\lambda(g)^i_j$ が成り立つ．ただし，$\delta \in \mathfrak{h}^*_{\mathbb{R}}$ は $(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{h})$ の全ての正のルートの和の 1/2 であり，$\|\cdot\|_{\mathfrak{h}^*}$ は Killing 形式から定まるノルムを表す．従って，計量 $\widetilde{m}$ による直交分解 $T_pP = H_p \oplus V_p \cong T_{\pi(p)}M \oplus T_eG$ に注意して，次の補題が得られる．

補題 2.1. 上の対応関係 $L^2_\lambda(P) \ni \psi_P \mapsto \psi_j \in L^2(M, \mathcal{E}_\lambda)$ $(j = 1, \ldots, d_\lambda)$ において，

$$(\Delta_P\psi_P)_j = L^{(\lambda)}\psi_j + (\|\lambda+\delta\|^2_{\mathfrak{h}^*} - \|\delta\|^2_{\mathfrak{h}^*})\psi_j$$

が成り立つ．

系． $\Delta_P|_{L^2_\lambda(P)}$ のスペクトルは

$$\left\{\nu^{(\lambda)}_k + (\|\lambda+\delta\|^2_{\mathfrak{h}^*} - \|\delta\|^2_{\mathfrak{h}^*}) \,|\, k \in \mathbb{N}\right\} \quad (d_\lambda \text{ 重})$$

で与えられる．

3 量子化条件とスペクトル

$\lambda := \sqrt{-1}\mathcal{O}_\mu \cap C^+ \in \Lambda^*$ とする．古典力学系 $\mathcal{H}_\mu = (P_\mu, \Omega_\mu, H_\mu) \cong (M^\#_\mu, \Omega^\#_\mu, H^\#_\mu)$ における量子化条件を満たす Lagrange 多様体と量子エネルギーの対応関係を考察する．磁場における力学系（$G = U(1)$）の場合の類似から，自然に以下のような定式化，定理が考えられる．

定義． $(M^\#_\mu, \Omega^\#_\mu)$ の Lagrange 部分多様体 L が**量子化条件を満たす**とは，(T^*P, Ω_P) の Lagrange 部分多様体 L_P が存在し，次の (i), (ii) が満たされることである：

(i) $L_P \subset J^{-1}(\mathcal{O}_\mu)$, $\chi_\mu \circ \pi_{\mathcal{O}_\mu}(L_P) = L$. ただし，$\pi_{\mathcal{O}_\mu} : J^{-1}(\mathcal{O}_\mu) \to P_\mu = J^{-1}(\mathcal{O}_\mu)/G$ は射影を表す．

(ii) L_P 上の任意の閉曲線 γ に対して，

$$\frac{1}{2\pi}\int_\gamma \omega_P - \frac{1}{4}m_{L_P}([\gamma]) \in \mathbb{Z} \tag{Q-C}$$

が成り立つ．ただし，ω_P は T^*P の正準 1 次形式 (i.e., $\Omega_P = d\omega_P$)，$m_{L_P} \in H^1(L_P, \mathbb{Z})$ は L_P の Maslov 類を表す，

このような設定で，自然に予想される量子-古典対応は以下のようになる．

定理（予想）．L を $(M^{\#}_{\mu},\Omega^{\#}_{\mu})$ のコンパクト Lagrange 部分多様体で量子化条件を満たすものとする．さらに，L_P について次が満たされているとする：
(i) L_P は G 不変である．
(ii) $(T^*P,\Omega_P,\widetilde{H})$ の flow φ_t が L_P を不変にし，かつ $\varphi_t|_{L_P}$ で不変な L_P 上の non-zero half-density が存在する．
また，E を次をみたす正定数とする：
(iii) L 上で，$H^{\#}_{\mu}\equiv E$ である．(従って，L_P 上で，$\widetilde{H}\equiv E+\|\mu\|^2$ である．)
このとき，Schrödinger 作用素 $L^{(n_k\lambda)}$ $(k\in\mathbb{N})$ の固有値の列 $\{\nu_{j_k}^{(n_k\lambda)}\}_{k=0}^{\infty}$ が存在して，次を満たす：

$$\nu_{j_k}^{(n_k\lambda)}=E\tilde{n}_k^2-C\tilde{n}_k+O(1)\quad(k\to\infty)$$

ここで，$n_k:=dk+1$ であり，d は $\{1,2,4\}$ の中で，$dm_{L_P}([\gamma])\equiv 0\,(\mathrm{mod}4)$ (for $\forall\gamma$) を満たす最小値である．また，

$$\tilde{n}_k=\frac{\|n_k\lambda+\delta\|_{\mathfrak{h}^*}}{\|\lambda\|_{\mathfrak{h}^*}},\quad C=\left(E+\|\lambda\|^2_{\mathfrak{h}^*}\right)\frac{(\lambda,\delta)_{\mathfrak{h}^*}}{\|\lambda\|^2_{\mathfrak{h}^*}}.$$

4 定理の証明の筋書き

◇ **概略**

群

$$\widetilde{G}:=S^1\times G=\{(e^{it},g);\ 0\le t<2\pi,\ g\in G\}$$

を考える．Peter-Weyl の定理より，$L^2(\widetilde{G})$ の要素 $f(t,g)$ は次で与えられる：

$$f(t,g)=\sum_{\ell\in\mathbf{Z}}\sum_{\rho\in\hat{G}}\sum_{j,k}\hat{f}^{j,k}_{\ell,\rho}e^{i\ell t}\rho(g)^j_k \tag{4.1}$$

ここで，$\rho(g)^j_k$ は表現 ρ の行列成分である．

$n_k=dk+1\,(k=0,1,2,\dots)$ とするとき，(4.1) において，$(\ell,\rho)\neq(n_k,\rho_{n_k\lambda})$ に対して，$\hat{f}^{\cdot,\cdot}_{\ell,\rho}=0$ となるような $f\in L^2(\widetilde{G})$ の全体を $L^2_\lambda(\widetilde{G};\{n_k\lambda\})$ と書く．

G 上の 1 次擬微分作用素 $D_G:=(\Delta_G+\|\delta\|_{\mathfrak{h}^*})^{1/2}$ に対して，

$$D_G\rho_\lambda(g)^j_k=(\|\lambda+\delta\|_{\mathfrak{h}^*})\rho_\lambda(g)^j_k,\quad D_G\rho_{n\lambda}(g)^j_k=(\|n\lambda+\delta\|_{\mathfrak{h}^*})\rho_{n\lambda}(g)^j_k\ (n\in\mathbb{N})$$

が成り立つことに注意する．さて，連続線形作用素 $A:\mathcal{D}'(\widetilde{G})\to\mathcal{D}'(P)$ で以下を満たすものを考える：

(A-i) $\widetilde{E}^{-1}\Delta_P A-AD_{\widetilde{G}}$ が $L^2(\widetilde{G})$ から $L^2(P)$ への有界作用素を誘導する．

ここで，$\widetilde{E}:=E+\|\mu\|^2(=E+\|\lambda\|_{\mathfrak{h}^*})$ で，$D_{\widetilde{G}}$ は次で与えられる $\widetilde{G}$ 上の作用素である：

$$D_{\widetilde{G}}:=-\frac{1}{4}\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{i}{\|\mu\|}D_G\right)^2.$$

(A-ii) $A : L^2_\lambda(\widetilde{G}; \{n_k\lambda\}) \to L^2(P)$ は等長的である．

(A-iii) $(w_k)^j_l(t,g) := (d_k/2\pi)^{1/2} e^{in_k t} \cdot \rho_{n_k\lambda}(g)^j_l$ $(d_k := \dim V_{n_k\lambda})$ とするとき，$(\psi_k)^j_l := A\big[(w_k)^j_l\big]$ は $L^2_{n_k\lambda}(P)$ の要素である．

このような A が存在したとする．$w_k = (w_k)^j_l$ に対して，

$$D_{\tilde{G}} w_k = \bar{n}_k^2 w_k, \quad \bar{n}_k := \frac{1}{2}\Big(n_k + \frac{\|n_k\lambda + \delta\|_{\mathfrak{h}^*}}{\|\lambda\|_{\mathfrak{h}^*}}\Big)$$

に注意すると，(A-i) より

$$\begin{aligned} \|(\widetilde{E}^{-1}\Delta_P - \bar{n}_k^2)\psi_k\|_{L^2(P)} &= \|(\widetilde{E}^{-1}\Delta_P A - AD_{\tilde{G}})w_k\|_{L^2(P)} \\ &\leq M\|w_k\|_{L^2(\tilde{G})} = M. \end{aligned}$$

一方，$\{\varphi_j\}_{j=1}^\infty$ を $\Delta_P|_{L^2_{n_k\lambda}(P)}$ の固有関数の正規直交基底とすると，$L^2_{n_k\lambda}(P) \ni \psi_k = \sum_j \hat{\psi}_j\varphi_j$ と書けるから，$\tilde{\nu}_j^{(n_k\lambda)} := \nu_j^{(n_k\lambda)} + \|n_k\lambda + \delta\|^2_{\mathfrak{h}^*} - \|\delta\|^2_{\mathfrak{h}^*}$ として，

$$\begin{aligned} &\|(\widetilde{E}^{-1}\Delta_P - \bar{n}_k^2)\psi_k\|^2_{L^2(P)} \\ &= \|\widetilde{E}^{-1}\sum_j \hat{\psi}_j\tilde{\nu}_j^{(n_k\lambda)}\varphi_j - \sum_j \bar{n}_k^2\hat{\psi}_j\varphi_j\|^2_{L^2(P)} \\ &= \frac{1}{\widetilde{E}^2}\sum_j \{\tilde{\nu}_j^{(n_k\lambda)} - \widetilde{E}\bar{n}_k^2\}^2|\hat{\psi}_j|^2 \\ &\geq \frac{1}{\widetilde{E}^2}\inf_j\{\tilde{\nu}_j^{(n_k\lambda)} - \widetilde{E}\bar{n}_k^2\}^2\sum_j|\hat{\psi}_j|^2 \\ &= \frac{1}{\widetilde{E}^2}\inf_j\{\tilde{\nu}_j^{(n_k\lambda)} - \widetilde{E}\bar{n}_k^2\}^2. \end{aligned}$$

ここで，条件 (A-ii): $\sum_j |\hat{\psi}_j|^2 = \|\psi\|^2_{L^2(P)} = \|w_k\|^2_{L^2(\tilde{G})} = 1$ を使った．上の不等式と合わせて，

$$\inf_j\{\tilde{\nu}_j^{(n_k\lambda)} - \widetilde{E}\bar{n}_k^2\}^2 \leq \widetilde{E}^2 M, \quad i.e., \quad \inf_j|\tilde{\nu}_j^{(n_k\lambda)} - \widetilde{E}\bar{n}_k^2| \leq \text{Const.}$$

この式を整理すれば，定理の式が得られる．

このようにして，上の条件 (A-i) − (A-iii) を満たす作用素 A を構成できれば主定理が証明されたことになる．この様な A を，量子化条件をみたす Lagrange 部分多様体 L (L_P) から定義される canonical relation $C \subset (T^*P\backslash 0) \times (T^*\widetilde{G}\backslash 0)$ によって定まる Fourier 積分作用素（cf. [4], [9]）として構成する．その手法は [5] で $G = U(1)$ の場合に遂行されたものの拡張である．(元々のアイデアは [10] および [9, Ch.XII, §4] で議論された自由粒子（測地流）の力学系の場合に帰着する.)

◇ 作用素 A の構成

$m_{L_P} \in H^1(L_P, \mathbb{Z})$ を mod 4 で考えて，$m_{L_P} : \pi_1(L_P) \to \mathbb{Z}_4$ で定まる連結 (d 重) 被覆空間

$$p : \overline{L}_P \to L_P \ (\subset T^*P)$$

を考える．$\bar{\ell}_0 \in \overline{L}_P$ を固定し，写像 $\alpha : \overline{L}_P \to S^1$ を

$$\bar{\ell} \mapsto \exp\left(i\int_{\bar{c}} p^*\omega_P\right) \quad (\bar{c}:\ \bar{\ell}_0 \text{ と } \bar{\ell} \text{ を結ぶ曲線})$$

と定義する．量子化条件 (Q-C) により，α が well-defined であることが分かる．更に，

$$j : \overline{L}_P \times \mathbb{R}^+ \times G \to (T^*P\backslash 0) \times (T^*\widetilde{G}\backslash 0) = (T^*P\backslash 0) \times (T^*S^1 \times T^*G \backslash 0)$$

を

$$j(\bar{\ell}, \tau, g) = (\tau\ell, (\alpha(\bar{\ell}\cdot g^{-1}), -\tau), (g, -\tau J(\ell\cdot g^{-1})))$$

と定義する．(ここで，群の左移動により，$T^*G \cong G \times \mathfrak{g}^*$ としている.) 像

$$\Lambda := j(\overline{L}_P \times \mathbb{R}^+ \times G)$$

を考える．

補題 4.1. Λ は $(T^*P\backslash 0) \times (T^*\widetilde{G}\backslash 0)$ の conic な Lagrange 部分多様体である．

作用素 A を

$$C := \Lambda' = \{(\tau\ell;\ (\alpha(\bar{\ell}\cdot g^{-1}), \tau), (g, \tau J(\ell\cdot g^{-1}))) \mid \bar{\ell} \in \overline{L}_P, \tau \in \mathbb{R}^+, g \in G\}$$

を canonical relation とする Fourier 積分作用素，すなわち，A の核が（局所的に）振動積分

$$(2\pi)^{-(d+2r+1)/4-N/2}\int e^{i\phi(x,y,\theta)}a(x,y,\theta)\,d\theta \quad (x \in P, y \in \widetilde{G}, \theta \in \mathbb{R}^N)$$

(Fourier integral distribution) であたえられる作用素として構成する．

A に対する要請 (A-i),(A-ii),(A-iii) は，それぞれ，より具体的に以下のような方針でチェックしていく：

(A-i) について：Fourier 積分作用素（擬微分作用素）の積（合成）のシンボル計算をもとに，作用素の order を考察し，有界性を示す．

(A-ii) について：A^*A が $L^2(\widetilde{G})$ から $L^2(\widetilde{G}; \{n_k\lambda\})$ への直交射影であることを示す．

(A-iii) について：canonical relation C が "G-同変" であることから示せる．

このような方針での証明において，もっともデリケートな議論を要するのは (A-ii) についてである．まず，$L^2(\widetilde{G})$ から $L^2(\widetilde{G}; \{n_k\lambda\})$ への直交射影 Π が order $-r/2$ の Fourier 積分作用素であること，その canonical relation が A^*A のそれと等しいことを示す．これより，A の principal symbol を適当に定めることによって，lower order を無視すれば $\Pi = A^*A$ が成り立つようにできる．さらに，lower order 部分を修正して正確に $\Pi = A^*A$ が成り立つようにする．このような一連の議論について，完全な考察を現時点では行っていないが $G = U(1)$ の場合の議論（[5]）と同様な筋道で遂行できると考えられる．このようにして，作用素 A が（Hörmander の意味で）クラス

$$I^{-\frac{1}{4}(d+2r-1)}(P \times \widetilde{G}, C)$$

($d = \dim M$, $r = \dim G$) に属する Fourier 積分作用素として構成される．

5 量子系についての再検討，課題

◇ 半古典近似

磁場の場合，$n \in \mathbb{N}$ に対して，

$$L^{(n\lambda)} = -\sum m^{jk}(\nabla_j + nA_j)(\nabla_k + nA_k)$$

（$\sum A_j dx^j : \lambda \in \mathbb{R}$ に対する局所接続形式）で与えられるから，$1/n = \hbar$ と考えると，

$$\hat{H}_\hbar = \frac{1}{n^2}L^{(n\lambda)} = -\sum_{j,k} m^{jk}(\hbar\nabla_j + A_j)(\hbar\nabla_k + A_k)$$

が $(P_\lambda, \Omega_\lambda, H_\lambda)$ に対応する（本来の）Schrödinger 作用素といえる．

この見方の類似として，ゲージ場の場合も $\hat{H}_\hbar = L^{(n\lambda)}/\tilde{n}^2$ と考えると，$\nu(\hbar) := \nu_{j_k}^{(n_k\lambda)}/\tilde{n}_k^2$ は $\hat{H}_\hbar$ の固有値と考えられる．このとき，定理の主張は

$$\nu(\hbar) = E - C\hbar + O(\hbar^2),$$

すなわち，**『E が半古典エネルギー（すなわち，量子化条件を満たす Lagrange 部分多様体があって，その上で $H \equiv E$ となる）であれば，E は対応する量子エネルギーの $O(\hbar)$ の近似値を与える．』**

◇ 課題：量子系の定式化の再検討

磁場（G が可換群 $U(1)$）の場合は，[5] で示したように，半古典エネルギー E は量子エネルギーの $O(h^2)$ の近似値をあたえる．ところが，非可換群 G の場合は，G のユニタリ表現のウェイトに関する定数が余分に関係してくるために $O(\hbar)$ の近似になってしまう．このことは古典系に対する Schrödinger 作用素として，ベクトル束上の単なる Laplacian ではなく，低階項にゲージ場に関わる項を付け加えた作用素を考えるのが自然であることを示唆している．

例えば，定数項を付け加えた作用素

$$\widetilde{L}^{(\lambda)} = L^{(\lambda)} + \frac{\|\lambda + \delta\|_{\mathfrak{h}^*}}{\|\lambda\|_{\mathfrak{h}^*}}(\lambda, \delta)_{\mathfrak{h}^*} I$$

を考え，$\hbar = (n_k\tilde{n}_k)^{-1/2}(\sim n_k^{-1})$ とおくと，対応する固有値に関して，$\nu(\hbar) = E + O(\hbar^2)$ が成り立つ．ここで，作用素 $\widetilde{L}^{(\lambda)}$ について，定数項が出てくる幾何学的（あるいは物理的）に自然な定式化（意味付け）は何か？　あるいは，もっと違った原理に基づいて妥当な Schrödinger 作用素を導くことができるか？　という問題が興味ある課題として残っている．

参考文献

[1] R. Abraham and J.E. Marsden, *Foundations of Mechanics, 2nd ed.*, Benjamin/Cummings, Reading MA, 1978

[2] V. Guillemin and A. Uribe, Circular symmetry and the trace formula, Invent. Math., **96**(1989), 385-423.

[3] V. Guillemin and A. Uribe, Reduction and the trace formula, J. Diff. Geom., **32**(1991), 315-347.

[4] L. Hörmander, *The Analysis of Linear Partial Differential Operators IV*, Springer-Verlag, 1985.

[5] R. Kuwabara, On Maslov's quantization condition for mechanics in a magnetic field, J. Math. Tokushima Univ., **33**(1999), 33-54.

[6] R. Montgomery, Canonical formulation of a classical particle in a Yang-Mills field and Wong's equations, Lett. Math. Phys. **8**(1984), 59-67.

[7] R. Schrader and M.E. Taylor, Semiclassical asymptotics, gauge fields, and quantum chaos, J. Funct. Anal. **83**(1989), 258-316.

[8] M.E. Taylor and A. Uribe, Semiclassical spectra of gauge fields, J. Funct. Anal. **110**(1992), 1-46.

[9] F. Treves, *Introduction to Pseudodifferential and Fourier Integral Operators*, Vol.2, Plenum Press, New York,1980.

[10] A. Weinstein, On Maslov's quantization condition, *Fourier Integral Operators and Partial Differential Equations*, Springer Lect. Notes in Math. **459**(1974), 341-372.

(2006年5月30日)